Pokus o zápočet - příklady z kombinatoriky a grafů I

Michal Tuláček

1 Náhradní příklady za první písemku

1.1 Série 6, příklad 1

Zadání: Ověřte rovnost

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}$$

kde k je přirozené čislo. Jak souvisí rovnost s faktem, že každé přirozené číslo má jednoznačný zápis ve dvojkové soustavě?

Řešení: Indukcí:

1. Pro k = 0:

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$$
$$1+x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x}$$
$$1+x = 1+x$$

OK

2. Platí pro $0, 1, 2, \cdots, k-1$. Ověříme $k \leftarrow k-1$. Nechť máme

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k})$$

Dle IP:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^k}}{1-x}\left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1-\left(x^{2^k}\right)^2}{1-x} =$$
$$= \frac{1-x^{2\cdot 2^k}}{1-x} = \frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}$$

QED

A ona souvislost. Koeficient u x^n udává počet různých binárních zápisů, které určují číslo n. A onen koeficient je vždy 1.

1.2 Série 6, příklad 2

Zadání: V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků - větrníky, kremrole a punčové dortíky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily aspoň 2 zákusky a přitom nejvýše 3 kremrole? Vyjádřete hledaný počet jako koeficient vhodné mocniny x ve vhodném součinu polynomů.

Řešení: Jak již napovídá zadání, počet způsobů koupě n zákusků mi udává koeficient u x^n v součinu vhodných polynomů. Pro větrníky a dortíky je zákuskovým polynomem $\left(x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{12}\right)$, pro kremrole je oním polynomem $\left(x^2+x^3\right)$.

Pokud tyto polynomy znásobím, $\left(x^2+x^3\right)\left(x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{12}\right)^2$, pak koeficient u x^{12} udává, kolika způsoby si mohu koupit 12 zákusků.

$$x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{12}=x^2\left(1+x+x^2+\cdots+x^{10}\right)=x^2\frac{1-x^{11}}{1-x}$$

Zákuskový polynom se tedy dá přepsat na: $\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}x^2\right)^2\left(x^2+x^3\right)=x^4\left(1-x^{11}\right)^2\left(x^2+x^3\right)(1-x)^{-2}$.

$$x^4\left(1-x^{11}\right)^2\left(x^2+x^3\right)(1-x)^{-2}=x^4\left(1-2x^{11}+x^{22}\right)\left(x^2+x^3\right)(1-x)^{-2}$$

Pro člen s x^{-2} pomocí zobecněné binomické věty spočteme:

$$(1-x)^{-2}=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}x+\binom{3}{1}x^2+\cdots=1+2x+3x^2+\ldots$$

Po složení do jednoho vzorce a roznásobení konečných závorek poté dostáváme:

$$x^4\left(1+2x+3x^2+\ldots\right)\left(x^2-2x^{22}+x^{44}+x^3-2x^{33}+x^{66}\right)$$

Zjevně do koeficientu u x^{12} zasáhnou pouze součiny $x^4\cdot x^2\cdot 7x^6$ a $x^4\cdot x^3\cdot 6x^5$. Hledaný počet kombinací je tedy 13.

Od pohledu to vypadá podezřele málo, ale pokud aplikuji pozorování, které jsem měl udělat už na začátku, a nepatlat se s vytvořujícími funkcemi, tak kremrole mi řešení rozdělí na dvě možnosti - buď mám kremrole 2 a musím tedy koupit 10 dalších zákusků a nebo mám kremrole 3 a zákusků mám koupit 9. V prvním případě na dortíky a větrníky vycházení tyto kombinace: 2+8, 3+7, . . . , 8+2, kterych je právě 7 a nebo pro 3 kremrole 2+7, 3+6, . . . , 7+2, kterých je 6. Což je dohromady 13, tedy stejně.

1.3 Série 7, příklad 3

Zadání: Nechť c_n je počet sekvencí teček a čárek celkové délky n, kde každá tečka má délku 1 a každá čárka délku 2. Spočítejte c_n.

Řešení: Po drobné analýze problému dojdeme k tomu, že pro každé n možnosti tvoří buď všechny možnosti z přechozí generace, ke kterým přidáme tečku, a nebo z předminulé ke kterým přidáme čárku. Vyjádřeno vzorcem $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$. Počáteční podmínky nastavme $c_1=1$ (sekvence délky jedna obsahuje právě jednu tečku) a $c_2=2$ (sekvence délky dva obsahuje buď dvě tečky a nebo jednu čárku).

Uvedený obecný vzorec je po bližším ohledání totožný se vzorcem pro fibonacciho čísla, jen posunuté o jednu pozici ($F_{n+1}=c_n$). Tzn. buď drze použiji známý vzorec pro n-té Fibbonacciho číslo:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

A nebo budu řešit diferenční rovnici: $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, s počátečními podmínkami $y_1 = 1$ a $y_2 = 2$.

Charakteristický polynom této rovnice je $x^2 - x - 1 = 0$.

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

Z toho plyne:

$$y(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

.

Známe počáteční podmínky, takže můžeme udělat rovnice o dvou neznámých C_1, C_2, ze kterých zjistíme vzorec pro n-tý člen.

$$1 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$2 = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

Protože zde nechci oslňovat schopnostmi řešit dvě rovnice o dvou neznámých, rovnou napíšu výsledek:

$$C_1 = -\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{5\left(1+\sqrt{5}\right)}, \qquad C_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

A tedy žádaný vzorec je:

$$c_n = -\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{5\left(1+\sqrt{5}\right)} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

1.4 Série 7, příklad 8

Zadání: V posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, ...)$ je vždy následující člen aritmetickým průměrem předchozích dvou členů. Určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Řešení: V zadání je řečeno, že máme rekurentní posloupnost $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ a chceme spočítat její limitu. Klasický postup známý z matematické analýzy na určení limity rekurentní posloupnosti zde selhává (poznatek, že pokud a_{n+2} jde k A potom k A jdou i a_{n+1} a a_n, tudíž dosadíme a dořešíme rovnici o jedné neznámé). Proto zkusím najít pro tuto posloupnost přímý vzorec $a_n = ...$

Toho dosáhnu vyřešením diferenční rovnice $y_{n+2} - \frac{y_{n-1}}{2} - \frac{y_n}{2} = 0$. K ní najdu charakteristický polynom $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$. Ten má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Posloupnost tedy bude ve tvaru $a_n = C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Opět vyjdeme ze znalosti prvních dvou členů (tedy vezmeme je jako vstupní parametry).

$$a_0 = C_1 + C_2$$
$$a_1 = C_1 - \frac{C_2}{2}$$

Vyjde nám, že $C_1 = \frac{a_0+2a_1}{3}$ a $C_2 = \frac{2(a_0-a_1)}{3}$. Dosadíme do rovnice a máme vzorec pro n-tý prvek posloupnosti:

$$a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3} + \frac{2(a_0 - a_1)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

První člen je konstanta, druhý člen je konstanta krát posloupnost jdoucí k nule. Tedy dle vět "o aritmetice limit" a "o součinu omezené a nulové posloupnosti" je limitou právě první člen ve vzorci pro n-tý člen posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}$$

2 Náhradní příklady za druhou písemku

2.1 Série 9, příklad 1

Zadání: Nechť A je množina mohutnosti n a $\binom{A}{n-1}$ značí množinu všech $(n-1)$-prvkových podmnožin A. Dokažte, že $\binom{A}{n-1}$ má systém různých reprezentantů.

Řešení: Není zadáno I, pro určení mohutnosti indexové množiny. Dovolím si předpokládat, že každá množina je v množinovém systému nejvýše jednou. Dále předpokládejme, že $|I| = n$. Pokud by $|I| > n$, pak SRR neexistuje, pokud by $|I| < n$, pak SRR existuje triviálně.

Tvrzení dokážeme demostrací, že platí Hallova podmínka. Podmnožin velikosti $n-1$ je právě n. Pro $J = I$ platí $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| = |A| = n \geqslant |J|$. Pro $1 < |J| \leqslant n-1$ je pak vždy $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| = n$, pouze pro $|J| = 1$, je $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| = n - 1 \geqslant |J|$. Pro $|J| = 0$ je $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| = 0 \geqslant |J|$.

Tedy pro každou podmnožinu I Hallova podmínka platí. Dle Hallovy věty pak existuje SRR.

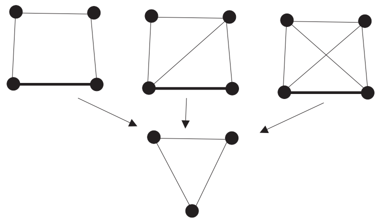
2.2 Série 10, příklad 1

Zadání: Dokažte, že v každém vrcholově 2-souvislém grafu na alespoň 4 vrcholech existuje hrana e taková, že $G.e$ je vrcholově 2-souvislý ($G.e$ je graf G po kontrakci hrany e).

Řešení: Indukcí podle počtu vrcholů

1. n = 4.

   Na obrázku jsou všechny 2-souvislé grafy na 4 vrcholech. Zvýrazněná hrana je hrana e a po její kontrakci zbyde vždy C_3, tedy 2-souvislý graf.



2. Tvrzení platí pro $n = 4, 5, ..., n-1$, indukční krok $n \leftarrow n-1$